Simulation vs. Analysis

Die berechtigte Nachfrage eines Kollegen zu unserem einfachen Beispiel mit der Abkühlung einer Kaffeetasse, *"das könne man doch ganz einfach mit den Mitteln der Analysis lösen"*, Stichwort Differentialgleichungen, führt auf die Frage: Warum macht man denn dann so etwas wie Simulation dynamischer Systeme.

Der einfachste Fall

Zu der konstanten Temperaturänderung von 2 Grad Abkühlung pro Zeiteinheit bei einer Anfangstemperatur von 80 Grad benötigt man nicht einmal die Mittel der Analysis

f als Symbol für die Temperatur, t für Zeit, $f'(t) = -2$ *und* $f(0) = 80$

um die passende Funktion $\mathbf{f(t) = 80 - 2\,t}$ angeben zu können.

Mit Umgebungstemperatur und Temperaturdifferenz

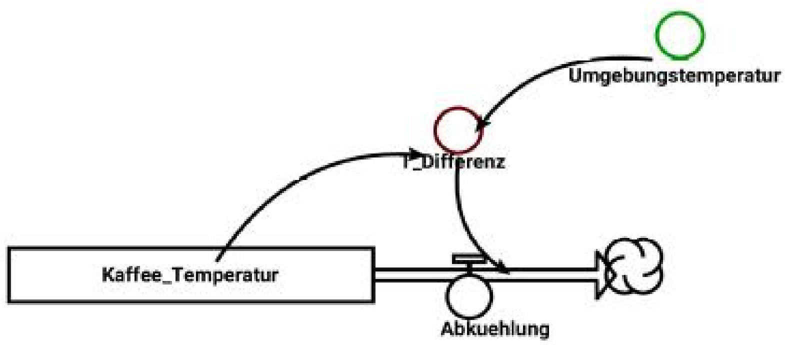
Berücksichtigt man die Umgebungstemperatur und arbeitet zur Vereinfachung mit dem Symbol f für die Temperaturdifferenz und k als Proportionalitätsfaktor, dann erhält man

$f'(t) = -k \cdot f(t)$ *mit nun* $f(0) = 60$

die passende Funktion für die Temperaturdifferenz $\mathbf{f(t) = 60 \cdot e^{-k \cdot t}}$ nicht mehr ganz so einfach. Aber die Lösung sollte prinzipiell bekannt sein.
Für den Temperaturverlauf erhält man dann den Term $\mathbf{T(t) = 20 + 60 \cdot e^{-k \cdot t}}$ (also Anfangswert 80) mit $\mathbf{k = \ln(60/58)}$, wenn nach der ersten Zeiteinheit eine Abkühlung von 2 eine Temperatur von 78, also einen Temperaturdifferenzwert von 58 Grad ergeben soll.

Vergleich

Der Vergleich der Simulationsergebnisse (nächste Seite) zeigt dann die Übereinstimmung des Simulationsergebnisses für das dargestellte Modell mit den Werten der analytisch bestimmten Funktions-werte.



[Simulationsmethode
Runge-Kutta, Anfangswert Temperatur 80 Grad, Umgebungstemperatur 20 Grad, Abkuehlung=T_Differenz/30]

Wozu also?

Tatsächlich wird man keine Simulation zur Problemlösung wählen, wenn es eine analytische Lösung gibt (siehe einführende Präsentation). Allerdings können wir an den einfachen Beispielen

- grundlegende Eigenschaften kennenlernen und
- die Qualität der Verfahren an Ergebnissen prüfen.

	Simulationsergebnis		***Berechnung***	
t	**Kaffee_Temperatur**		**f(t)=20 + 60*exp(-k*t) mit**	
0	80		80	**k=ln(60/58)**
1	78		78	
2	76,0666666667		76,066666667	
3	74,1977777778		74,197777778	
4	72,3911851852		72,391185185	
5	70,6448123457		70,644812346	
6	68,9566519342		68,956651934	
7	67,3247635364		67,324763536	
8	65,7472714185		65,747271418	
9	64,2223623712		64,222362371	
10	62,7482836255		62,748283625	
11	61,323340838		61,323340838	
12	59,9458961434		59,945896143	
13	58,6143662719		58,614366272	
14	57,3272207295		57,32722073	
15	56,0829800385		56,082980039	
16	54,8802140373		54,880214037	
17	53,717540236		53,717540236	
18	52,5936222281		52,593622228	
19	51,5071681539		51,507168154	
20	50,4569292154		50,456929215	
21	49,4416982416		49,441698242	
22	48,4603083002		48,4603083	
23	47,5116313568		47,511631357	
24	46,5945769783		46,594576978	
25	45,708091079		45,708091079	
26	44,8511547097		44,85115471	
27	44,022782886		44,022782886	
28	43,2220234565		43,222023457	
29	42,447956008		42,447956008	
30	41,6996908077		41,699690808	
31	40,9763677808		40,976367781	
32	40,2771555214		40,277155521	
33	39,6012503374		39,601250337	
34	38,9478753261		38,947875326	
35	38,3162794819		38,316279482	
36	37,7057368325		37,705736833	
37	37,1155456048		37,115545605	
38	36,5450274179		36,545027418	
39	35,993526504		35,993526504	
40	35,4604089539		35,460408954	